

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. Obtener los cinco primeros términos de las sucesiones dadas por los siguientes términos generales:

| | | |
|--|---|----------------------|
| (a) $\frac{(-1)^n}{2^n}$ | (b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | (c) $\frac{1}{n!}$ |
| (d) $(-1)^{n+1}(2n-1)$ | (e) $(-1)^n \frac{n+1}{n}$ | (f) $\frac{n!}{n^n}$ |
| (g) $a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1/n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ | (h) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$ | |

2. Determinar el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son:

| | |
|--|---|
| (a) $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \dots$ | (b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ |
| (c) $1, 8, 27, 64, 125, \dots$ | (d) $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots$ |
| (e) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, -\frac{9}{10}, \dots$ | (f) $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{2^8}, \dots$ |

3. Determinar cuáles de las sucesiones del ejercicio 2 son monótonas.

4. Determinar cuáles de las sucesiones (a), (b) y (c) del ejercicio 2 son acotadas encontrando cotas en cada caso.

5. Dada la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\varepsilon_1 = 1/16$ ¿existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq n_0$ se verifica que

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon_1 = 1/16?$$

¿Y para $\varepsilon_2 = \frac{1}{25}$ y $\varepsilon_3 = \frac{1}{90}$? ¿Y, en general, para un $\varepsilon > 0$?

¿Qué conclusión se tiene sobre la convergencia de $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$?

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$n \rightarrow \infty$

Cartagena99

7. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \left\{ (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty} & \text{(b)} \quad \left\{ (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} & \text{(a)} \quad \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi \right) \right\}_{n=1}^{\infty} \\
 \text{(b)} \quad \left\{ (-1)^{n+1} \cos(n\pi) \right\}_{n=1}^{\infty} & \text{(c)} \quad \left\{ (-1)^n n \cos(n\pi) \right\}_{n=1}^{\infty} & \text{(d)} \quad \left\{ \frac{\cos(n\pi)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}
 \end{array}$$

8. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 + 6n) & \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \pi}{n^3 + 2n - 1} & \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 5}{2n + 1} \\
 \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 8}{2n^2 + 7n + 1} & \text{(e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot \log n & \text{(f)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{n^2} - 5^n \right) \\
 \text{(g)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 5^n} & \text{(h)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \cdot \frac{(n+1)^3}{2n^3 + 3} & \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{-n}} \cos((2n-1)\pi) \\
 \text{(j)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n & \text{(k)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n & \text{(l)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{5} \right)^n \\
 \text{(m)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{3} \right)^n & \text{(n)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \right)^{2n} & \text{(ñ)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} \\
 \text{(o)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{5^n} & \text{(p)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2^{n+2}}{4^{n+1} + 8^{n-1}} & \text{(q)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^2}{1 + a^2} \right)^n, \quad a \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

9. Calcular los siguientes límites:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi n + 1)}{n^2} \quad \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n^2+1} \sin n^3}{2^n} \quad \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} \cdot \arctan \left(\frac{n^2 \ln n}{\sqrt{n}} \right)$$

10. Aplicando la regla del sandwich, calcular los siguientes límites:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \right)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

11. Estudiar la convergencia y calcular el límite de las sucesiones recurrentes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} a_1 = 1/4, \\ a_{n+1} = 1/4 + a_n^2, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} a_1 = 4, \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n} - 1, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad \begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} a_1 = \sqrt{2}, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{2}{5}, \\ a_{n+1} = \frac{2}{5}(a_n^2 + 1), \quad \forall n \geq 1 \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \\
 \text{(g)} \quad \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + a_n^2}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} &
 \end{array}$$

12. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) & \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) & \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n^2}{n^3 + 1}\right) \\
 \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{n+1}{n}\right) & \text{(e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2n^2 + 1}{(n+1)^2}\right) & \text{(f)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{8n^2 + 1}\right)^{1/3} \\
 \text{(g)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^3}\right)^{n^2} & \text{(h)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 1}\right)^{2n} & \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{2n+1}
 \end{array}$$

13. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) & \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - n!) & \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n - n!} \\
 \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{n} & \text{(e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 e^{-n} & \text{(f)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n}{e^n} \\
 \text{(g)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3 \ln n}} & \text{(h)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \frac{1}{n^2} & \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2}\right)^n
 \end{array}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$$

$$\text{(p)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$$

$$\text{(q)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)! \sqrt{n}}$$

14. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{n^2 + 5n} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \right)^{n^2} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2n + 2}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{1 + (n+1)!} + \frac{n!}{2 + (n+1)!} + \dots + \frac{n!}{n + (n+1)!} \right)$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \quad (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} \quad (g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{n}{n^2 + 1} \right)^n$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad (i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n + 7^n} \quad (j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n} + 4n)}{2n^2 + 1}$$

$$(k) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2^n}} \quad (l) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{4n}{2n}} \quad (m) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^3 n}{n^3}$$

$$(n) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{2n^2+1} \quad (\tilde{n}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n-1} + 3^n}{5^{n-2} + 6^{n+1}} \quad (o) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^n \operatorname{sen} \frac{1}{n!} + \ln n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right)$$

15. Sea a_n el número de instrucciones de un algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. El algoritmo actúa de la siguiente forma:

- para un solo dato de entrada, necesita una instrucción,
- para n datos de entrada, realiza $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n - 1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo.

Se pide:

- i) Definir la sucesión $\{a_n\}$ y estudiar su monotonía y acotación.
- ii) Sabiendo que se verifica $|a_n - 2n^2| < 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^2}$.

16. Los puntos $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 0)$ y $P_3(0, 0)$ determinan un triángulo. Sea P_4 el pie de la perpendicular trazada desde P_3 al segmento $\overline{P_1P_2}$; en general, sea P_{n+1} el pie de la perpendicular



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**